■ 文章编号:1672-5328(2011)03-0066-05

城市交通 第9卷 第3期 2011年5月
Urban Transport of China, Vol.9, No.3, May 2011

基于马尔可夫过程的快速路OD矩阵估计方法

OD Matrix Estimation for Urban Expressway Based on Markov Process

刘　斌[1]，杨晓光[2]，张　晔[3]

(1.中国城市规划设计研究院,北京 100044;2.同济大学交通工程系,上海 201804;3.北京市城市规划设计研究院,北京 100045)

LIU Bin[1], YANG Xiao-guang[2], ZHANG Ye[3]

(1.China Academy of Urban Planning & Design, Beijing 100044, China; 2. Department of Traffic Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China; 3. Beijing Municipal Institute of City Planning & Design, Beijing 100045, China)

摘要：为得到城市快速路网络的OD矩阵,引入马尔可夫理论。运用吸收马尔可夫过程对快速路网络进行建模分析,给出相应求解算法推导路段流量、小区OD矩阵表达式,并介绍了运用MATLAB软件进行矩阵求解的方法。最后进行了算例分析,利用VISSIM仿真,通过布设线圈检测器,对OD矩阵估计模型及算法进行精度评价。结果显示,模型可很好地拟合路段流量,并能精确估计OD矩阵。

Abstract: To develop the origin-destination matrix of urban expressway network, this paper applies the theory of Markov Process to model expressway network, and introduces the related algorithm that estimates traffic flow at road segments and OD matrix, as well as the matrix solution using MATLAB. Finally, the paper presents an example to assess the accuracy of OD matrix estimation and the algorithm based on VISSIM and vehicle detector data. The evaluation results show that the model is effective to obtain traffic flow at road segments and OD matrix.

关键词:城市交通;智能交通系统;OD矩阵估计;马尔可夫过程

Keywords: urban transportation; intelligent transportation system; OD matrix estimation; Markov Process

中图分类号：U491.1+4　　文献标识码：A

收稿日期:2010-01-17

基金项目:“十一五”国家高技术研究发展计划(863计划)资助项目“城市交通状态智能预报与管理支持系统”(2008AA11Z205),国家自然科学重点基金项目“城市交通网络优化与管理”(70631002)。

作者简介:刘斌(1986—),男,山东威海人,硕士,主要研究方向:OD矩阵估计与预测、交通信息工程及控制。

E-mail:tjjt_liubin@126.com

0 引言

20世纪70年代以来，国外交通规划和数学规划界就已开始研究OD(Origin-Destination)矩阵估计问题，提出的一些模型和算法[1-3]大多基于数学规划理论，有特定的目标函数和约束条件，求解时采用frank-wolf解法、惩罚函数法、最速下降法、牛顿迭代法等经典数学规划算法，从满足路段流量约束关系的OD矩阵可行解空间中找到最有可能的解。随着科学技术的发展，交通检测技术日新月异，检测设备种类增多、覆盖率大大提高，如何高效利用多源数据信息成为OD矩阵估计中的重要课题。

基于吸收马尔可夫过程的OD矩阵估计，在获取模型参数时需要结合大量实际数据，包括路段流量及交叉口转弯流量等，因此可充分利用多源数据信息，并使估计结果更符合实际情况。有不少学者针对该方法进行了研究，其中文献[4]提出交通流在交叉口处以一定的转移概率改变行驶方向进入下一交叉口时，可运用马尔可夫过程描述交通分配问题；文献[5]研究表明马尔可夫过程也可被看做是一种随机用户均衡。城市快速路具有封闭性、连续性特点，车辆在快速路匝道分合流处以一定概率改变行驶方向，可用马尔可夫过程进行描述，且快速路OD矩阵估计近年来备受关注，故本文就此展开研究。

1 马尔可夫过程建模

为分析将马尔可夫理论应用于OD矩阵估计问题的可行性，首先引入随机游动的概念：指一个质点在直线(或平面、空间)上某范围内随机地逐步移动，即假定一个质点在零时刻位于实数轴上原点的位置，每隔单位时间，该质点右移或左移一个长度单位，且右移的概率为$p(0<p<1)$，左移的概率为q，$q=1-p$。设X_n表示n时刻质点所处的位置，$n=0, 1, 2, \cdots$，已知质点现在的位置为X_n^0，且将来的位置仅与X_n^0有关，而与时刻n_0之前质点所处的位置无关。因此，$\{X_n, n\geqslant 0\}$是一个马尔可夫过程，且状态空间$E=(\cdots, -1, 0, 1, \cdots)$。在随机游动中，若假定状态空间$E=(0, 1, 2, \cdots)$，一旦$X_n=0$，质点今后将永远停留在状态0处，通常称状态0为吸收壁。

在交通网络中，车辆在路段之间的随机移动可看作是随机游动。当车辆进入目的地小区后，将消失在网络中，可以将吸引小区看作吸收壁。因此，可用吸收马尔可夫过程描述网络中交通流的转移现象。

给定随机序列$\{X_n, n\geqslant 0\}$，如果对任意正整数$k\geqslant 2$，任意时刻$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_{k+1}$，任意非负整数$i_1, i_2, \cdots, i_k$，条件概率函数总满足$P(X_t^{k+1}=i_{k+1}\mid X_t^1=i_1, \cdots, X_t^k=i_k)=P(X_t^{k+1}=i_{k+1}\mid X_t^k=i_k)$，$i_{k+1}\in E$，则称$\{X_n, n\geqslant 0\}$为离散时间的马尔可夫链，简称为马尔可夫链[6]。

条件概率$P(X_t^{k+1}=i_{k+1}\mid X_t^k=i_k)$的含义是马尔可夫链$\{X_n, n\geqslant 0\}$在时刻$t_k$处于状态$i_k$条件下，在时刻$t_{k+1}$转移到状态$i_{k+1}$的概率。此类条件概率统称转移概率。交通网络中，车辆在交叉口的转向行为与上一交叉口的转向状态无关，车辆从一个路段(小区)转移到另一个路段(小区)的概率集合就组成了马尔可夫链。

给定马尔可夫链$\{X_n, n\geqslant 0\}$。如果对一切正整数n，一切$i_k\in E$，转移概率$P(X_t^{k+1}=i_{k+1}\mid X_t^k=i_k)$与时刻$t_k$无关，那么，称$\{X_n, n\geqslant 0\}$为齐次马尔可夫链。对于齐次马尔可夫链$\{X_n, n\geqslant 0\}$，通常记转移概率$P_{ij}(n)\triangleq P(X_t^{k+1}=i_{k+1}\mid X_t^k=i_k)$，并称$P_{ij}(n)$为齐次马尔可夫链$\{X_n, n\geqslant 0\}$的$n$步转移概率，$n=1, 2, \cdots$，且其与起始时刻无关。交通网络中，车辆在交叉口或路段出入口处的转向比例在短时间内可看作是不变的，因此对于每一个小时间段内的交通流转向概率矩阵，都可看作是齐次马尔可夫链。只要求出n步转移概率矩阵$P_{ij}(n)$，就可得出车辆选择各个目的地的概率，即OD矩阵。

对于一般快速路网络，假定其有r个进出口匝道(可看作小区)以及s个路段，则马尔可夫转移概率矩阵可表达为

$$P_{(2r+s)\times(2r+s)}=\begin{bmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(r+s)} \\ R_{(r+s)\times r} & Q_{(r+s)\times(r+s)} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

式中：I表示一个单位阵；O表示空矩阵；R表示车辆从发生点(或路段)向吸引点转移的概率矩阵；Q表示车辆在发生点以及路段间转移的概率矩阵。由于发生点以及吸引点之间不存在直接的转移，也不存在向发生点转移的车辆，所以矩阵$R_{(r+s)\times r}$和$Q_{(r+s)\times(r+s)}$有如下特性：

$$R_{(r+s)\times r}=\begin{bmatrix} R_{r\times r}^1 \\ R_{s\times r}^2 \end{bmatrix}, Q_{(r+s)\times(r+s)}=\begin{bmatrix} 0_{r\times r} & Q_{r\times s}^1 \\ 0_{s\times r} & Q_{s\times s}^2 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

式中：$R_{r\times r}^1$为空矩阵；$R_{s\times r}^2$表示路段到吸引点的转移概率；$Q_{r\times s}^1$表示发生点向路段的转移概率；$Q_{s\times s}^2$表示路段之间的转移概率；Q_{ij}^n表示车辆从i出发经过n步转移到j的概率，其中i，j代表路段、发生点或吸引点。

假设小区产生量为$V_{1\times(r+s)}=(v_1, v_2, \cdots, v_r, 0\cdots 0)$，产生矩阵为$V_{r\times(r+s)}=\begin{bmatrix} V_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，则由马尔可夫理论可知，发生点产生的车辆经过各路段的全概率矩阵为

$$Q_{ij}^0+Q_{ij}^1+Q_{ij}^2+\cdots=[I-Q_{ij}]^{-1}=\begin{bmatrix} I_{r\times r} & -Q_{r\times s}^1[I_{s\times s}-Q_{s\times s}^2]^{-1} \\ 0_{s\times r} & [I_{s\times s}-Q_{s\times s}^2]^{-1} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

则可以得到各吸引小区的吸引量$u_{1\times r}$，路段流量$x_{1\times s}$以及OD矩阵$V_{r\times r}^{od}$：

$$u_{1\times r}=V_{1\times(r+s)}[I-Q_{ij}]^{-1}R_{(r+s)\times r}, \tag{4}$$

$$x_{1\times s}=V_{1\times(r+s)}Q_{r\times s}^1[I-Q_{s\times s}^2]^{-1}, \tag{5}$$

$$V_{r\times r}^{od}=V_{r\times(r+s)}[I-Q_{ij}]^{-1}R_{(r+s)\times r}. \tag{6}$$

2 快速路网络拓扑描述

给定一个简单的城市快速路网络，讨论如何根据吸收马尔可夫模型，抽象快速路网络拓扑，

见图1。该市快速路由三个上匝道、两个下匝道以及四个路段组成，O点为小区1，2，3，5；D点为小区4，6，7；路段和小区之间通过上下匝道连接。交通流从发生点产生，消失于吸引点。模型中小区数$r=7$，路段数$s=4$，并以r^*表示吸引点，r表示发生点，则转移概率矩阵可描述为

$$R_{11\times7}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1r_1^* & s_1r_2^* & \cdots & s_1r_7^* \\ s_2r_1^* & s_2r_2^* & \cdots & s_2r_7^* \\ s_3r_1^* & s_3r_2^* & \cdots & s_3r_7^* \\ s_4r_1^* & s_4r_2^* & \cdots & s_4r_7^* \end{bmatrix},$$

$$Q_{11\times11}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & r_1s_1 & r_1s_2 & r_1s_3 & r_1s_4 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_2s_1 & r_2s_2 & r_2s_3 & r_2s_4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_7s_1 & r_7s_2 & r_7s_3 & r_7s_4 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s_1s_1 & s_1s_2 & s_1s_3 & s_1s_4 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s_2s_1 & s_2s_2 & s_2s_3 & s_2s_4 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s_3s_1 & s_3s_2 & s_3s_3 & s_3s_4 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s_4s_1 & s_4s_2 & s_4s_3 & s_4s_4 \end{bmatrix}.$$

矩阵中各元素代表小区及路段之间的交通流转移概率，通过线圈检测器可获取。由于城市快速路OD对数量较少，路段关联性也不是很强，故马尔可夫转移概率矩阵中0元素较多。对于用矩阵来描述的恰定线性方程组，n个未知数的问题需要对$n\times n$阶矩阵进行操作，相当于一个拥有100 MB内存的计算机只能求解10 000个未知数的问题。对复杂路网来说，这远远不够。故可将马尔可夫矩阵以稀疏矩阵的形式导入MATLAB软件进行存储。所谓稀疏矩阵就是不存储矩阵中的0元素，而只对非0元素进行操作，这样就大大减少了存储空间和计算时间，使得对大规模路网的OD矩阵估计成为可能。

3 算例分析

利用VISSIM仿真手段对OD矩阵估计模型及算法进行精度评价，评价流程见图2。

1) 搭建VISSIM路网仿真平台，并布设线圈检测器，用以检测相应路段或连接器的流量；

2) 外部输入OD矩阵，并将其作为真实的OD矩阵，设定好车辆行驶路径；

3) 运行仿真程序，输出检测器流量数据；

4) 将流量数据进行处理，计算出马尔可夫一步转移概率矩阵；

5) 将马尔可夫一步转移概率矩阵以稀疏矩阵的形式导入MATLAB中进行计算，输出路段流量和OD矩阵；

6) 对比模型计算的路段流量和仿真得到的路

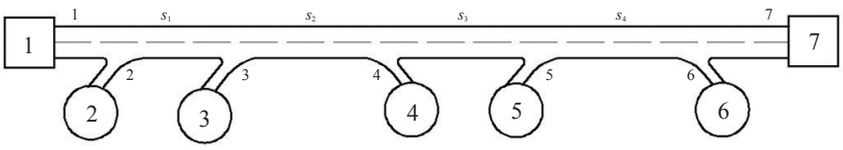

图1 快速路网络结构

Fig.1 Expressway network structure

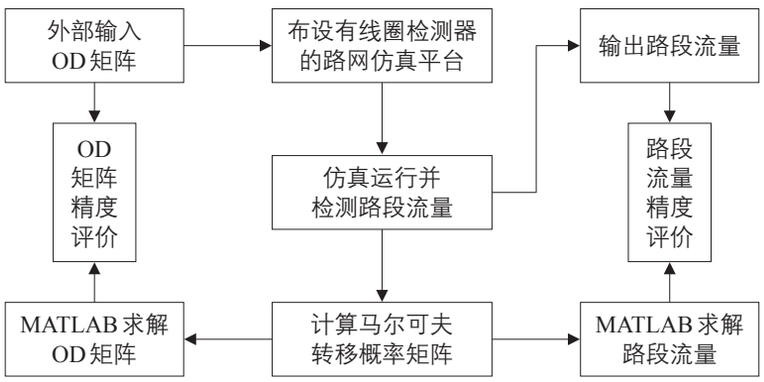

图2 模型算法精度评价流程图

Fig.2 Flow chart of model evaluation

段流量，进行路段流量的精度评价；

7) 对比模型计算的OD矩阵和仿真初始输入的OD矩阵，进行OD矩阵的精度评价。

按照快速路网络结构搭建VISSIM仿真平台，如图3所示，在相应路段布设9组线圈检测器，即可检测快速路所有路段和匝道的流量。

输入初始OD矩阵，如表1所示。运行仿真软件得到相应路段流量，经过数据处理得到马尔可夫转移概率矩阵。在对大规模路网进行OD矩阵估计时，可将仿真得到的马尔可夫转移概率矩阵采用稀疏矩阵的形式导入MATLAB软件，进行矩阵运算[7]。运用式(5)可计算得到路段流量。图4给出了模型计算流量与仿真流量的结果对比，模型计算结果能够很好地拟合仿真路段流量。

用线圈检测器获得产生量矩阵 $V_{r\times(r+s)}$，代入式(6)估计OD矩阵，结果见表2。

采用矩阵分布相对误差、均方根相对误差以及相关系数检验估计的OD矩阵精度，前两个指标是对推算矩阵的整体准确度进行评价，相关系数是对矩阵拟合情况进行分析。计算公式及结果见表3，其中：V^*_{ij}为所估计的OD矩阵元素；V_{ij}为真实OD矩阵元素；$\overline{V_{ij}}$为各元素平均值；m为非0元素个数；n为小区数。可以看出，估计值能够很好地拟合真实值，相关系数达到0.9。因此该模型能精确估计快速路OD矩阵。

4 结语

本文详细介绍了马尔可夫理论，并分析其在OD矩阵估计领域的可行性。将吸收马尔可夫模型应用于快速路OD矩阵估计中，利用仿真手段通过布设线圈检测器获取路段流量信息，并与模型计算流量比较，结果显示模型拟合精度较高；把输入的初始OD矩阵和模型估计的OD矩阵进行比较，误差在10%左右，相关系数达到0.9。算例结果表明该模型具有较强的实用性，可以为城市快速路交通管理与控制等提供决策支持。

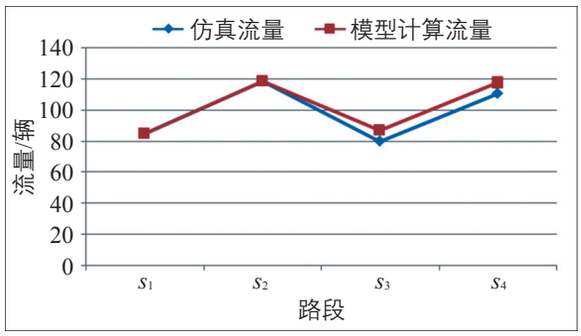

图4 模型与仿真流量对比图

Fig.4 Traffic volumes derived by model calculation and by simulation

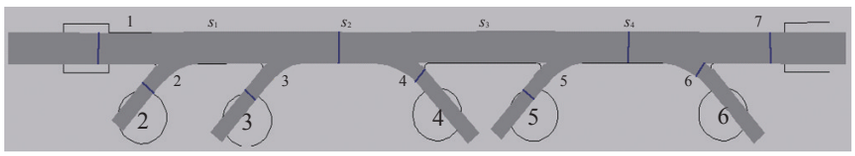

图3 快速路网络仿真平台

Fig.3 Simulation platform for expressway network

表1 初始OD矩阵

Tab.1 The initial OD matrix

小区	1	2	3	4	5	6	7	产生量
1	0	0	0	18	0	19	18	55
2	0	0	0	10	0	10	10	30
3	0	0	0	11	0	12	11	34
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	15	16	31
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
吸引量	0	0	0	39	0	56	55	150

参考文献：

References:

[1] Martin L Hazelton. Statistical Inference for Time Varying Origin-destination Matrices [J]. Transportation Research Part B, 2008 (42): 542-552.

[2] Javier doblas. An Approach to Estimating and Updating Origin-destination Matrices Based upon Traffic Counts Preserving the Prior Structure of a Survey Matrix[J]. Transportation Research Part B, 2005(39): 565-591.

[3] Hazelton Martinn L. Estimation of Origin-destination Matrices from Link Flows on Uncongested Networks [J]. Transportation Research Part B, 2000 (34): 549-566.

[4] Sasaki T. Theory of Traffic Assignment Through Absorbing Markov Process[J]. Proceedings of JSCE, 1965(125): 28-32.

[5] Akamatsu T. Cyclic Flows, Markov Process and Stochastic Traffic Assignment [J]. Transportation Research Part B, 1996(30): 369-386.

[6] 何迎晖. 随机过程简明教程[M]. 上海：同济大学出版社，2004.
HE Ying-hui. A Simple Tutorial for Stochastic Process[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2004.

[7] 王沫然. MATLAB与科学计算[M]. 北京：电子工业出版社，2003.
WANG Mo-ran. MATLAB and Scientific Computing [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry Press, 2003.

表2 推算得到的OD矩阵

Tab.2 The estimated OD matrix

小区	1	2	3	4	5	6	7	产生量
1	0	0	0	15	0	19	21	55
2	0	0	0	8	0	10	12	30
3	0	0	0	9	0	12	13	34
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	15	16	31
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
吸引量	0	0	0	32	0	56	62	150

表3 OD矩阵估计检验计算公式及结果

Tab.3 The formula and results of OD matrix evaluation

评价指标	计算公式	指标值
矩阵分布相对误差	$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lvert V_{ij}-V_{ij}^{*}\rvert}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_{ij}}$	9.3%
均方根相对误差	$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(V_{ij}-V_{ij}^{*})^{2}\Big/m-1}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_{ij}\Big/m}\times 100\%$	11.8%
相关系数	$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(V_{ij}-\overline{V_{ij}})(V_{ij}^{*}-\overline{V_{ij}^{*}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(V_{ij}-\overline{V_{ij}})^{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(V_{ij}^{*}-\overline{V_{ij}^{*}})^{2}}}$	0.9