

三维约束重力模型及其应用

Tri-constrained Gravity Model and its Application

陈仁春

(福州市城市规划设计研究院, 福建 福州 350003)

CHEN Ren-chun

(Fuzhou Planning Design & Research Institute, Fuzhou Fujian 350003, China)

摘要: 双约束重力模型对多中心、长距离组团之间的出行分布描述误差较大,因此需要建立一种多条件的约束模型。从最大熵模型理论入手,在产生量与吸引量双约束基础上,新增第3类约束条件。利用总体阻抗约束最大熵模型推导出三维约束重力模型的一般形式,增加了缩放系数,并利用重力式先验概率的最大熵模型对其进行论证。同时,提出了模型参数标定与检验方法。以福州市交通分布模型为例,对长距离出行约束和跨江出行约束进行分析,并分别应用双约束和三维约束重力模型进行计算,结果说明了三维约束重力模型的可操作性和优越性。

Abstract: The double-constrained gravity model may generate relatively large errors of trip distributions among distantly separated land-use groups of multi-centers. Therefore, there is need to develop a new constrained model under more conditions. In light of the maximum entropy theory, and considering a third constrain in addition to the double constrains of O_s and D_s , this paper formulates a general equation of a tri-constrained gravity model by introducing the total impedance entropy-maximizing model with a relaxing factor, and further performs a verification through the priori-probability of the gravity entropy-maximizing model. Meanwhile, the paper presents a methodology to calibrate and validate the model. The paper also reports a demonstrative application in the City of Fuzhou, Fujian Province, with the constrains of long distance trips and cross-river trips tested using the double-constrained and the tri-constrained gravity models, respectively. The results show that the tri-constrained gravity model is more promising in real-world implementation.

关键词: 交通规划; 交通模型; 三维约束重力模型; 缩放系数; 参数标定
Keywords: transportation planning; transportation model; tri-constrained gravity model; relaxing factor; parameters calibration

中图分类号: U491.1⁺2 文献标识码: A

收稿日期: 2008-11-03

作者简介: 陈仁春(1963—),男,福建仙游人,高级工程师,主要研究方向: 交通工程。E-mail: Cp1642@yahoo.com

0 引言

城市交通出行分布预测是交通需求预测四阶段模型中的重要一环,作为分布模型之一的重力模型具有模型形式及参数简单、实用性强的特点。最常用的重力模型为双约束重力模型,它可以保证产生量与吸引量守恒。但其采用的是平均化处理思想,即对平均出行阻抗具有较好的拟合效果,而对于某些特殊OD对的交通量拟合效果一般,尤其是对多中心、长距离组团之间的出行分布描述误差较大,同时未能考虑城市组团式发展模式对区域间居民出行分布产生的影响^[1]。

三维约束重力模型是在双约束重力模型的基础上,增加了某些特殊OD对之间的第3类约束条件,在3类约束条件下重新标定参数并计算OD矩阵。本文从最大熵原理入手,推导三维约束重力模型的参数形式,给出其迭代算法,并在福州市交通分布预测模型中进行应用。

1 交通分布预测模型

交通分布预测的代表模型有增

长系数模型、重力模型、最大熵模型。前两者较为常用，而熵模型很少用于实际的交通需求预测，但具有完备的理论基础。这3类模型的形式和计算方法都极其类似^[2]，实际上增长系数模型可以通过OD矩阵的联合概率最大值求得，最大熵模型可得到与双约束重力模型完全一致的模型形式。最大熵模型可分为3类：①使用总体交通费用为第3个约束表征的总体阻抗约束最大熵模型；②使用重力式先验概率的最大熵模型；③综合上述两类的组合模型^[3]。本文研究的三维约束重力模型以前两类最大熵模型为基础。

2 三维约束重力模型

三维约束重力模型可描述为在满足OD对行约束、列约束及其他OD对集合约束的条件下，根据调查得到的OD矩阵估计实际OD矩阵。即在双约束重力模型基础上，引入缩放系数，通过迭代计算，使得所有OD对出行组合的可能性最大。

2.1 模型推导

利用总体阻抗约束最大熵模型推导三维约束重力模型。根据最大熵原理，在交通分布中，共有 Q 个出行，每个出行有 $n \times n$ 个选择，先验概率为 $\{p_{ij} = \frac{1}{Q}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ 。其熵

$$H = -\sum_{i,j} p_{ij} \cdot \ln(p_{ij}) = -\sum_{i,j} \left[\frac{q_{ij}}{Q} \cdot \ln\left(\frac{q_{ij}}{Q}\right) \right] = -\frac{1}{Q} \sum_{i,j} q_{ij} [\ln q_{ij} - \ln Q] \quad (1)$$

假设规划年的平均出行阻抗为 \bar{R} ，则有

$$\sum_{i,j} q_{ij} R_{ij} = Q\bar{R}, \quad (2)$$

式中： p_{ij} 为从小区 i 至小区 j 出行的先验概率； q_{ij} 为从小区 i 至小区 j 的出行量； R_{ij} 为从小区 i 至小区 j 的出行阻抗。

除了出行产生量和吸引量的守恒条件约束外，增加第3类约束条件。设OD对分为 s 个出行

类别，集合设为 $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_s$ ， S_k 之间互斥且其并集为OD对全集 S 。假设第 k 类OD对的出行总量 Q^k 已知， δ_{ij}^k 为关系变量，即当OD对 $(i, j) \in S_k$ 时， $\delta_{ij}^k = 1$ ，否则 $\delta_{ij}^k = 0$ 。则第3类约束条件

$$\sum_{i,j} q_{ij} \delta_{ij}^k = Q^k, \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (3)$$

其中 $\sum_{k=1}^s Q^k = Q$ 。

因此，交通出行分布的最大熵原理可用规划问题进行描述：

$$\max_q H = -\frac{1}{Q} \sum_{i,j} [q_{ij} \cdot \ln(q_{ij}) - \ln Q], \quad (4)$$

$$s.t. \quad \sum_j q_{ij} = P_i, \quad (5)$$

$$\sum_i q_{ij} = A_j, \quad (6)$$

$$\sum_{i,j} q_{ij} R_{ij} = Q\bar{R} = R, \quad (7)$$

$$\sum_{i,j} q_{ij} \delta_{ij}^k = Q^k, \quad (8)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, s)$$

式中： P_i 为 i 小区的出行产生量； A_j 为 j 小区的出行吸引量； R 为常数。

此规划问题的Lagrange函数

$$L = H + \sum_i \alpha_i [P_i - \sum_j q_{ij}] + \sum_j \beta_j [A_j - \sum_i q_{ij}] + \gamma [R - \sum_{i,j} q_{ij} R_{ij}] + \sum_k \eta_k [Q^k - \sum_{i,j} q_{ij} \delta_{ij}^k], \quad (8)$$

式中： $\alpha_i, \beta_j, \gamma, \eta_k$ 是Lagrange系数($i, j = 1, 2, \dots, n$)。对 q_{ij} 求偏导，并令偏导数为0，解得

$$q_{ij} = \frac{Q}{e} e^{-\alpha_i} e^{-\beta_j} e^{-\gamma R_{ij}} e^{-\sum_k \eta_k \delta_{ij}^k} \quad (10)$$

即当 $(i, j) \in S_k$ 时，有

$$q_{ij} = \frac{Q}{e} e^{-\alpha_i} e^{-\beta_j} e^{-\gamma R_{ij}} e^{-\eta_k} \quad (11)$$

$$\text{令约束系数 } u_i = \frac{Q}{P_i e} e^{-\alpha_i}, v_j = \frac{e^{-\beta_j}}{A_j}; \lambda_k = e^{-\eta_k}, \lambda_k$$

为OD对集合 S_k 的缩放系数。则有

$$q_{ij} = u_i v_j P_i A_j e^{-\gamma R_{ij}} \lambda_k, \quad (i, j) \in S_k, \quad (12)$$

得到阻抗函数为指数型的三维约束重力模型。若将式(7)中的约束条件改为

$$\sum_{i,j} q_{ij} \cdot \ln(R_{ij}) = R', \quad (13)$$

式中：R'为常数，则有

$$q_{ij} = u_i v_j P_i A_j R_{ij}^{\gamma} \lambda_k, (i, j) \in S_k, \quad (14)$$

得到阻抗函数为幂型的三维约束重力模型。若将上述两个新的约束条件同时加入，则有

$$q_{ij} = u_i v_j P_i A_j R_{ij}^{\gamma} e^{-bR_{ij}} \lambda_k, (i, j) \in S_k, \quad (15)$$

式中：b为待定参数，得到阻抗函数为幂与指数的复合型三维约束重力模型^[4]。

将各种形式统一，得到三维约束重力模型的一般形式：

$$q_{ij} = u_i v_j P_i A_j \cdot f(R_{ij}) \cdot \lambda_k, (i, j) \in S_k, \quad (16)$$

$$u_i = [\sum_j v_j A_j \cdot f(R_{ij}) \cdot \lambda_k]^{-1}, \quad (17)$$

$$v_j = [\sum_i u_i P_i \cdot f(R_{ij}) \cdot \lambda_k]^{-1}, \quad (18)$$

$$\lambda_k = Q^k [\sum_{i,j} u_i v_j P_i A_j \cdot f(R_{ij}) \cdot \delta_{i,j}^k]^{-1}, \quad (19)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n; \delta_{i,j}^k = \begin{cases} 1 & (i, j) \in S_k \\ 0 & (i, j) \notin S_k \end{cases})$$

式中：f(R_{ij})为阻抗函数^[5]。

2.2 模型论证

总体阻抗约束最大熵模型假设条件式(7)成立，即将总体阻抗作为一个约束条件，阻抗函数中的参数在传统概念上由实际观察确定，而不是在约束条件中确定。此外，三维约束重力模型只能确定基础年的阻抗参数值，无法预测将来的总出行阻抗。为了更好地解释三维约束重力模型预测规划年OD分布的适用性，采用重力式先验概率最大熵模型进行进一步论证。

重力式先验概率最大熵模型中，先验概率形式最初假定为 $p_{ij} = \alpha P_i A_j \cdot f(R_{ij}) \cdot \lambda_k$ ， α 是为确保 $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ 的常数。先不考虑 p_{ij} ，将交通量 Q 任意分布到各小区之间产生的组合数 $E = \frac{Q!}{\prod_i \prod_j q_{ij}}$ ，再引入 p_{ij} ，得到 p_{ij} 分配到 PA 矩阵中第 (i, j) 个单元的联合概率分布

$$F = \frac{Q!}{\prod_i \prod_j q_{ij}} \prod_i \prod_j (p_{ij})^{q_{ij}}. \quad (20)$$

根据最大熵原理，F取最大值时对应的出行分布结果即为所求。对F取对数，求其最大值。令

$$\begin{aligned} Z &= \ln F = \ln Q! - \ln(\prod_i \prod_j q_{ij}!) + \ln(\prod_i \prod_j p_{ij}^{q_{ij}}) \\ &= Q \ln Q - Q - \sum_i \sum_j (q_{ij} \cdot \ln q_{ij} - q_{ij}) + \sum_i \sum_j (q_{ij} \cdot \ln p_{ij}) \end{aligned} \quad (21)$$

Z省略常数项Z转化为规划问题：

$$\max Z' = - \sum_i \sum_j (q_{ij} \cdot \ln q_{ij} - q_{ij}) + \sum_i \sum_j (q_{ij} \cdot \ln p_{ij}) \quad (22)$$

$$s.t. \quad \sum_j q_{ij} = P_i, \quad (23)$$

$$\sum_i q_{ij} = A_j, \quad (24)$$

$$\sum_{i,j} q_{ij} \delta_{i,j}^k = Q^k, \quad (25)$$

(i, j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., s)

利用2.1中相同方法可求得规划问题的解为：

$$q_{ij} = p_{ij} e^{\beta} e^{\gamma} = \alpha e^{\beta} e^{\gamma} P_i A_j \cdot f(R_{ij}) \cdot \lambda_k \quad (26)$$

令 $u_i = \alpha e^{\beta}$ ， $v_j = e^{\gamma}$ ，则 $q_{ij} = u_i v_j P_i A_j \cdot f(R_{ij}) \cdot \lambda_k$ ，将式(23)~(25)写成式(17)~(19)便可得到式(16)三维约束重力模型的一般形式。

由式(16)可知，三维约束重力模型只在双约束重力模型中增加了 λ_k 这一缩放系数，当 $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_s$ 中 $s = 1$ ，则 S_1 为 OD 对全集，此时约束条件式(3)不起任何作用，即三维约束重力模型退化为双约束重力模型；而当 S 为行集合或列集合时，也同样退化为双约束重力模型。此外，三维约束重力模型也可扩展为增长率模型，文献[2]证明了增长率模型与重力模型都可以从联合概率模型和最大熵模型得到。因此，三维约束增长率模型与三维约束重力模型类似，只需增加 λ_k 缩放系数及约束条件式(3)。

2.3 参数标定与检验方法

由式(17)~(19)可得方程个数为 $2n + s$ 个，且方程之间一般不具有相关性，而未知数 u_i, v_j, λ_k 的个数也为 $2n + s$ 个，因此式(17)~(19)的解存在且唯一。采用与双约束重力模型类似的参数标定和检验方法^[6-7]，具体计算步骤如下：

步骤1： u_i, v_j, λ_k 的初始值设为1，根据类似城市经验估计 γ 的初始值，例如取1(如果阻抗函数为多元函数，则宜采用多元回归的方法确定初始值)。

步骤2：根据初始 OD 矩阵或计算得到的

OD矩阵、 δ_{ij}^k 矩阵及 Q_k 值，由式(19)计算得到新的 λ_k 值。

步骤3：根据式(17)和(18)，迭代求解 u_i 和 v_j 的值。首先令 $v_j = 1$ ，求解 u_i ，再用这些值计算 v_j ，不断重复。在每一步结束时比较前后两次约束系数的相对误差是否达到精度要求(通常取小于3%)，达到要求后终止迭代过程。

步骤4：将计算得到的 u_i 和 v_j 代入式(16)，求得现状拟合分布表 $|\widehat{q}_{ij}|$ 。

步骤5：分别计算实际观测平均交通阻抗 $\bar{R} = \frac{1}{R} \sum_{i,j} q_{ij} R_{ij}$ 和 $\widehat{R} = \frac{1}{R} \sum_{i,j} \widehat{q}_{ij} R_{ij}$ ，求二者间误差 $\Delta = \frac{\widehat{R} - \bar{R}}{\bar{R}} \times 100\%$ 是否达到精度要求(通常取 $|\Delta| < 3\%$)。若达到精度要求，则接受参数标定值，否则执行步骤6。

步骤6： $\Delta < 0$ 时，表明拟合矩阵平均阻抗小于实际情况，参数 γ 过大，应令 $\gamma = \gamma / 2$ ；反之增加 γ 的值，令 $\gamma = 2\gamma$ 。返回步骤2。

4 应用实例

4.1 福州市交通模型概况

福州市现有交通模型主要以2006年进行的福州市城区综合交通调查数据为基础，并结合2008年综合交通规划调查数据进行补充完善。

模型范围为福州市主要市区范围，包括379个交通小区，1万条路段和120条公交线路。值得注意的是，预测模型的研究范围与2006年调查区的范围不太一致，交通分区也有相应的变化。调查范围主要为中心城区，而模型研究范围还包括长乐、青口、琅岐等外围组团(见图1和图2)。因此，研究范围呈现一种分散布局结构，组团之间距离较大，受江河、山体分隔严重，交通出行分布与平原城市有很大区别。

4.2 第3类约束条件

根据福州市城市空间结构和用地布局结构，第3类约束条件主要考虑两个因素：①长距离(平均出行距离大于50 km)出行约束；②跨江出行约束。

1) 长距离出行约束

长距离出行的定义和城市用地规模有关，在居民出行调查中，最大出行距离为28 km，平均出行距离为1.13 km，且出行量和出行比例随着出行距离的增加而迅速减小。可见福州市居民出行仍然依赖中心城区，平均出行距离较短。根据福州市远期可能的出行距离情况，定义大于50 km的出行为长距离出行。设出行概率密度函数为 $M_{pa} = aLe^{-bL}$ ， L 为出行距离。由回归分析可得，参数 $a = 4.58$ ， $b = 0.23$ ，相关系数 $R^2 = 0.92$ 。对 M_{pa} 求积分得到大于50 km的出行比例为

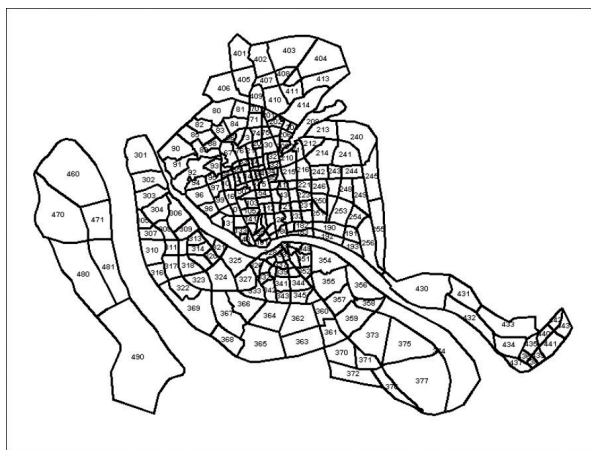


图1 2006年交通调查分区

Fig.1 Traffic zoning of survey 2006

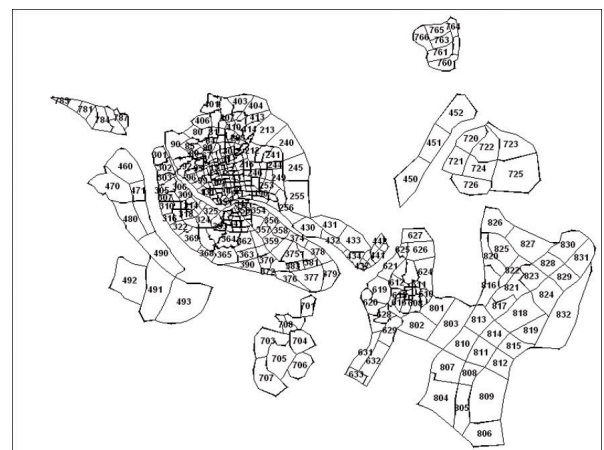


图2 模型研究范围交通分区

Fig.2 Traffic zoning of model research scope

0.0134%。

2) 跨江出行约束

跨江出行需求受到的影响很多, 包括用地布局、跨江通行能力限制、出行成本, 甚至心理影响等。由于跨江通道的密度比一般路网密度低很多, 跨江出行约束主要考虑跨江通行能力的限制, 计算可接受的服务水平(只计算机动车的饱和度), 再根据跨江出行结构反算可接受的跨江出行需求, 进而得到远期的跨江出行约束。

福州市受江河分隔较严重, 模型中主要考虑上游闽江(鼓楼、台江至南台岛)、乌龙江(南台岛

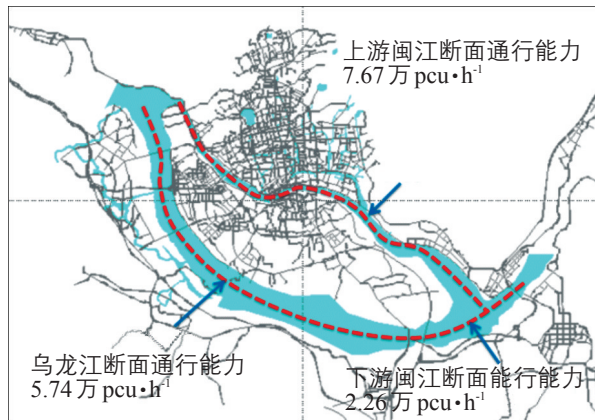


图3 远期跨江通行能力

Fig.3 Future capacity of crossing rivers

至大学城、南屿、青口)、下游闽江(南台岛至长乐)3个过江断面。现状调查跨闽江总出行量约为43万人次·d⁻¹(不计城市对外出行), 机动车流量为27.6万pcu·d⁻¹, 而闽江断面通行能力为34万pcu·d⁻¹, 因此, 可接受的日均饱和度为0.81。

4.3 双约束与三维约束重力模型计算结果对比

远期预测模型中, 长距离出行比例可取0.0134%, 可接受的日均饱和度为0.8, 跨江通行能力如图3所示。分别运用Gamma函数的双约束和三维约束重力模型进行计算, 且在三维约束重力模型中将所有PA矩阵对分为跨上游闽江、跨乌龙江、跨下游闽江、长距离出行和其他出行5类基本集合。对非相互独立的集合可采用分步骤的计算方法, 即先计算出流量Q^k较小的长距离出行约束, 后计算跨江出行约束, 重复计算多次, 当PA矩阵均能满足5类基本集合的约束时得到最终结果。

两个模型的参数标定和计算结果对比如表1、表2、图4和图5所示。可见三维约束重力模型所计算的长距离出行量和跨江出行量比双约束重力模型的计算结果小, 能更好地反映长距离出行

表1 模型参数标定结果对比

Tab.1 Comparison of parameters calibration results

项目	Gamma函数系数			跨上游闽江 缩放系数 λ_1	跨乌龙江 缩放系数 λ_2	跨下游闽江 缩放系数 λ_3	长距离出行 缩放系数 λ_4	其他出行 缩放系数 λ_5
	a	b	c					
双约束重力模型	1.82	-1.22	0.09					
三维约束重力模型	1.95	-1.24	0.10	0.91	0.74	0.57	0.21	1.08

表2 模型计算交通量结果对比

Tab.2 Comparison of calculated traffic volumes reaches from two models 万人次·d⁻¹

项目	跨上游闽江	跨乌龙江	跨下游闽江	长距离出行	其他出行	总计
双约束重力模型	12.45	78.5	57.86	0.68	774.47	924
三维约束重力模型	10.25	56.78	32.58	0.12	732.05	924

约束和跨江出行约束。因此，三维约束重力模型在福州市这种受江河阻隔严重且呈多组团分散布局结构的城市尤为适用。

5 结语

三维约束重力模型是对双约束重力模型的扩

展，其理论研究和实际应用都具有很高的价值。三维约束重力模型仍然需要不断改进和完善，比如出行量 Q^k 怎样确定才更合理，现状标定参数在预测模型中应如何调整，出行分布与方式划分、交通量分配怎样融合等等。随着经验的积累以及交通规划工作的持续开展，这些问题都有待进一步研究与探讨。

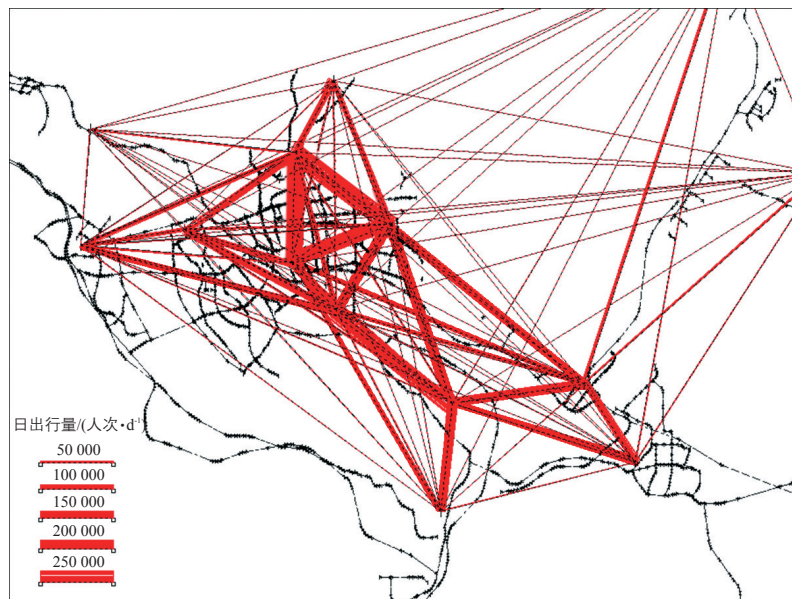


图4 双约束重力模型计算结果
Fig.4 Results of double-constrained gravity model

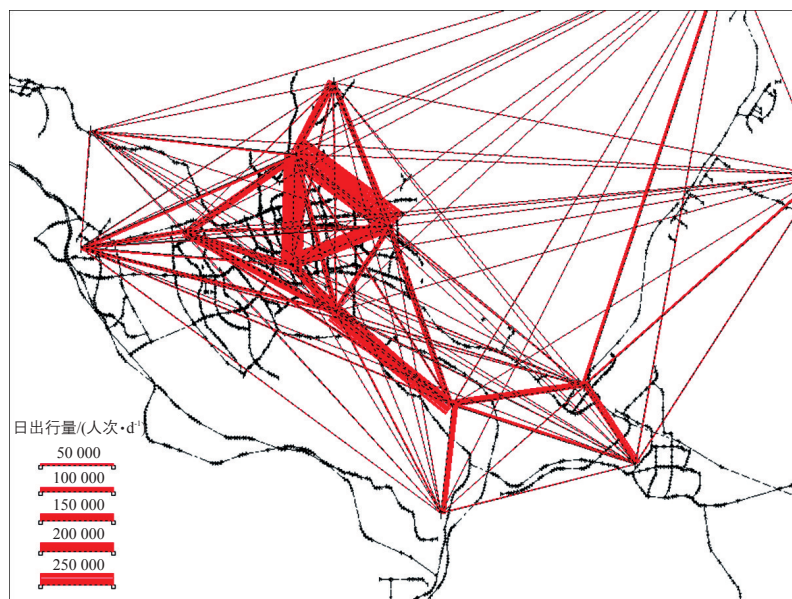


图5 三维约束重力模型计算结果
Fig.5 Results of tri-constrained gravity model

参考文献:

References:

- [1] 李文勇, 杨敏, 陈学武, 等. 组团城市交通需求预测——以浙江省湖州市为例[J]. 规划师, 2006, 22(1): 84-87.
LI Wen-yong, YANG Min, CHEN Xue-wu, et al. Forecast of Traffic Need in Cluster Cities: Taking Huzhou, Zhejiang as an Example[J]. *Planners*, 2006, 22(1): 84-87.
- [2] 邵昀泓, 王炜, 程琳. 交通分布模型的一致性研究[J]. 系统工程学报, 2006, 21(3): 328-332.
SHAO Yun-hong, WANG Wei, CHENG Lin. Study on the Consistency of Traffic Distribution Forecast Models[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2006, 21(3): 328-332.
- [3] 佐佐木纲. 最大熵模型及其在一种土地利用模型中的应用[J]. 国外城市规划, 1997, (3), 47-53.
ZUOzuomu Gang. Maximum Entropy Model and Its Application in Land-use Model[J]. *Urban Planning Overseas*, 1997, (3), 47-53.
- [4] 刘灿齐. 现代交通规划学[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001.
LIU Can-qi. *Modern Transportation Planning*[M]. Beijing: China Communications Press, 2001.
- [5] 田志立, 周海涛. 交通分布修正引力模型的应用[J]. 公路交通科技, 1996, 13(1): 48-53.
TIAN Zhi-li, ZHOU Hai-tao. Application of Modified Gravity Model of Traffic Distribution[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 1996, 13(1): 48-53.
- [6] 闫小勇. 一种改进的重力模型标定方法[J]. 交通与计算机, 2003, 21(4): 93-95.
YAN Xiao-yong. Improved Calibration Method of Gravity Model[J]. *Computer and Communications*, 2003, 21(4): 93-95.
- [7] 褚琴, 陈绍宽. 重力模型标定方法及应用研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2003, 3(2): 51-56.
CHU Qin, CHEN Shao-kuan. On Calibration of The Gravity Model during Traffic Forecast[J]. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2003, 3(2):51-56.

《城市交通》杂志参考文献书写格式

向《城市交通》杂志投稿时, 参考文献需在文后按顺序编码制列出, 并在文中引文处用“[]”标明。参考文献数量以不少于5篇为宜, 尽量引用出版年份较新的期刊论文、书籍、论文集, 而不引用教科书、手册、科普类期刊文章。中文和非英文(法、日、俄等)参考文献需译成英文。参考文献书写格式为:

期刊	作者. 题名[J]. 刊名, 年, 卷(期): 引用起止页码
专著(或译著)	著者. 书名[M]. 译者. 出版地: 出版者, 出版年
论文集	作者. 题名[A]. 编者. 文集名[C]. 出版地: 出版者, 出版年. 引用起止页码
学位论文	作者. 题名[D]. 所在城市: 保存单位, 年份
技术标准	标准代号 标准顺序号—发布年 标准名称[S]
技术报告	作者. 题名[R]. 报告代码及编号, 地名: 责任单位, 年份
报纸文章	作者. 题名[N]. 报纸名, 年-月-日(版次)
在线文献(电子公告)	作者. 题名[EB/OL]. [引用日期]. http://...
光盘文献(数据库)	作者. 题名[DB/CD]. 出版地: 出版者, 出版日期
其他文献	作者. 题名[Z]. 出版地: 出版者, 出版日期